

电磁场与电磁波

第8讲

3.2 时谐场的麦克斯韦方程

3.3 电流连续性原理

3.4 物质的本构关系

3.5 洛伦兹力

魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

作业：3.4, 3.5, 3.8

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}] \quad \mathbf{D}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{D}(x, y, z)e^{j\omega t}]$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{H}(x, y, z)e^{j\omega t}] \quad \mathbf{B}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{B}(x, y, z)e^{j\omega t}]$$

$$\mathbf{J}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{J}(x, y, z)e^{j\omega t}] \quad \rho_V(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\rho_V(x, y, z)e^{j\omega t}]$$

复矢量

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{x}_0 E_x(x, y, z) + \mathbf{y}_0 E_y(x, y, z) + \mathbf{z}_0 E_z(x, y, z)$$

等不是时间 t 的函数，它们是矢量，有三个分量，每个分量是复数。

根据复矢量的定义，对时谐矢量求时间偏导运算与对应的复矢量乘以 $j\omega$ 等效，

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[j\omega \mathbf{B}(x, y, z)e^{j\omega t}]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(x, y, z, t) \leftrightarrow j\omega \mathbf{B}(x, y, z)$$

引入 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 的复矢量后

麦克斯韦方程
$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(x, y, z, t)$$

可表示为
$$\nabla \times \operatorname{Re}[\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}] = -\operatorname{Re}[j\omega \mathbf{B}(x, y, z)e^{j\omega t}]$$

因为算符 ∇ 只对空间求导数，所以 ∇ 运算与取实部运算 Re 可调换次序，即

$$\operatorname{Re}[\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[-j\omega \mathbf{B}(x, y, z)e^{j\omega t}]$$

由此得到

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) = -j\omega \mathbf{B}(x, y, z)$$

同理

$$\nabla \times \mathbf{H}(x, y, z) = j\omega \mathbf{D}(x, y, z) + \mathbf{J}(x, y, z)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(x, y, z) = \rho_V(x, y, z)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(x, y, z) = 0$$

时谐场的复矢量形式，或者频域微分形式的麦克斯韦方程组

引入复矢量表示后，两时谐矢量叉积的时间平均值计算可简化为取实部运算，所以时谐矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 与 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 叉积的时间平均值计算就归结为

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) dt = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})]$$

	时域微分形式	时域积分形式	频域微分形式
法拉第定理	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$
安培定理	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}$
高斯定理	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$	$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_V dV$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$
磁通连续性原理	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

这里要再次强调一下，微分形式的麦克斯韦方程与积分形式的麦克斯韦方程中有关场量都是时间坐标与空间坐标的函数，而复矢量形式的麦克斯韦方程中有关场量等只是空间坐标的函数，复矢量形式的场量乘上 $e^{j\omega t}$ 取实部才是微分形式、积分形式麦克斯韦方程中的场量。

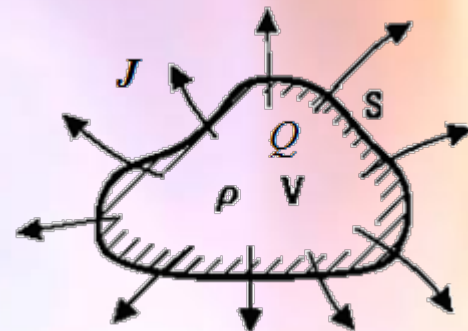
麦克斯韦方程组包含电流连续性原理。

用算符 ∇ 点乘 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 两边，并利用矢量运算恒等关系 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ 得到

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = 0$$

而根据式 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$ ，所以上式成为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$



这是关于**电流和电荷的连续方程**。其物理意义就是流出体积元的电流等于体积元内电荷随时间的减少率。

利用散度定理 $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Leftrightarrow \int_V \left(-\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \right) dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho_V) dV = -\frac{\partial Q}{\partial t}$

引入 $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ 对应的复矢量 $\mathbf{J}(x, y, z)$ 以及 $\rho_V(x, y, z, t)$ 对应的复数 $\rho_V(x, y, z)$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(x, y, z) = -j\omega \rho_V(x, y, z)$$

这就是时谐场（频域）的电荷守恒定律。

麦克斯韦方程组中有几个是独立方程？

7

式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 包含在式 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 中。

因为对式 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ，两边取散度可得到

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} \text{ 与时间无关}$$

如果把电荷与电流的连续方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$ 作为基本方程，

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$ 也不是独立的方程，因为 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = 0$$

将上两式比较便得到 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$

所以如果将电流连续方程看作基本方程，麦克斯韦方程组中只有两个旋度方程是独立的。

麦克斯韦方程组、电荷守恒与电流连续方程组中独立的方程是

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \quad + \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V \end{array} \right.$$

其中独立的标量变量共16个，而独立的标量方程只7个，尚需9个独立的标量方程才能求解。这另外的9个标量方程就由物质的**本构关系**提供

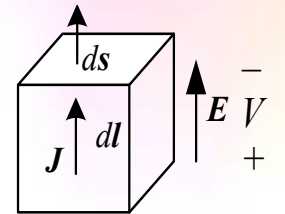
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right.$$

物质的本构关系作为辅助方程与麦克斯韦方程组一起构成一组**自治**的方程。

对于具体的结构，还需要 $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{H}$ ， $\mathbf{D}$ ， $\mathbf{B}$ 满足一定的边界条件，才能求出麦克斯韦方程组的具体解。

物质的本构关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{介质在电场作用下发生极化, 介电常数 } \varepsilon \\ \text{介质在磁场作用下发生磁化, 磁导率 } \mu \\ \text{导体的欧姆定律, 电导率 } \sigma \end{array}$$



$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \text{相对介电常数 } \varepsilon_r$$

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad \text{相对磁导率 } \mu_r$$

$$V = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, I = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

$$I = GV \quad d\mathbf{s}, d\mathbf{l} \text{ 同向}$$

$$\mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = G \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\varepsilon_0, \mu_0: \text{真空中的介电常数和磁导率} \quad \mathbf{J} = G d\mathbf{l} / d\mathbf{s} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$$

物质按 ε 、 μ 、 σ 进行分类

1. 线性与非线性:

ε 、 μ 、 σ 与 E 、 B 的强度无关，就是线性介质，否则就是非线性介质。

2. 均匀与非均匀:

ε 、 μ 、 σ 与空间坐标无关，就是均匀介质，否则就是不均匀介质。

3. 各向同性与各向异性:

ε 、 μ 、 σ 与电磁波在空间传播的方向性无关，称为各向同性介质，否则就是各向异性介质。

线性、均匀、各向同性介质称为简单介质。

4. 色散与非色散:

ε 、 μ 、 σ 与频率无关称为非色散介质，否则就是色散介质。

色散介质一定有损耗，有损耗的介质一定色散。

$\sigma \neq 0$ 的介质有损耗，可用复介电系数表示。

当 ε 、 μ 为复数时，其虚部表示介质损耗。

完纯介质： $\sigma = 0$ 的介质

完纯导体： $\sigma = \infty$ 的介质

用麦克斯韦方程求解电磁问题时，只有当所研究空间 ε 、 μ 、 σ 的具体表达式知道后，才能对麦克斯韦方程求解。

各向异性

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}, \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}, \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如果介质在电场作用下既发生极化又发生磁化，同样在磁场作用下既发生磁化又发生极化，这种介质成为**磁电介质**。

双各向同性

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \xi \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \zeta \mathbf{E} + \mu \mathbf{H}$$

双各向异性

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E} + \overline{\overline{\xi}} \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\zeta}} \cdot \mathbf{E} + \overline{\overline{\mu}} \cdot \mathbf{H}$$

手征介质

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - \chi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \chi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

复数形式的 ε 和 μ

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

$$\mu = \mu' - j\mu''$$

当 ε 、 μ 为复数时，其虚部表示介质损耗。

■ 从麦克斯韦方程组的角度理解（以 ε 为例）

对于无耗媒质（ $\sigma=0$ ）

$$\nabla \times \mathbf{H}(x, y, z) = j\omega\varepsilon\mathbf{E}(x, y, z)$$

对于有耗媒质（ $\sigma \neq 0$ ）

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}(x, y, z) &= j\omega\varepsilon\mathbf{E}(x, y, z) + \mathbf{J}(x, y, z) = j\omega\varepsilon\mathbf{E}(x, y, z) + \sigma\mathbf{E}(x, y, z) \\ &= j\omega(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega})\mathbf{E}(x, y, z) = j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\mathbf{E}(x, y, z)\end{aligned}$$

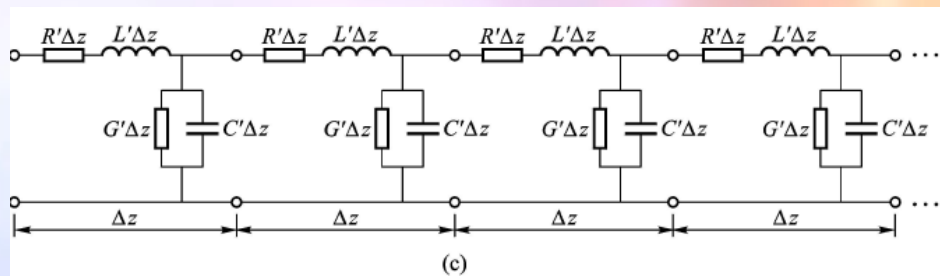
1. $\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$ 与 σ 有关，因此 ε'' 表示介质的损耗；
2. 除了 σ ，其它因素也会引起介质损耗 ε''

■ 从传输线角度理解

无耗线 $k = \omega\sqrt{L'C'} = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$

假设
$$\begin{cases} \epsilon = -j\epsilon'' \\ \mu = -j\mu'' \end{cases}$$

则有 $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = -j\omega\sqrt{\epsilon''\mu''}$



$$U \propto e^{-jkz} = e^{-\omega\sqrt{\epsilon''\mu''}z} \longrightarrow \text{沿}z\text{方向衰减}$$

介质的损耗

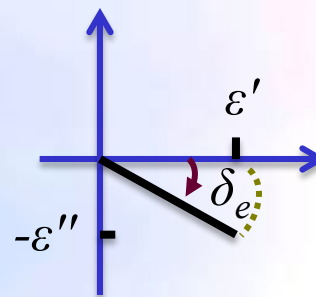
介质损耗角 δ_e

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

$$\delta_e = \arctan\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)$$

对于一般介质，总有 $\left|\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right| < 1$

所以 $\mathbf{D} = (\varepsilon' - j\varepsilon'')\mathbf{E} \approx e^{-j\delta_e} \varepsilon' \mathbf{E}$



损耗角表示电介质中电位移矢量 $\mathbf{D}$ 与电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 之间的相位差；
时域中， $\mathbf{D}(t)$ 滞后于 $\mathbf{E}(t)$

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon_0 (\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r)$$

相对介电常数实部和虚部满足克莱墨-克朗宁关系

$$\varepsilon'_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega' \varepsilon''_r(\omega)}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\varepsilon''_r(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varepsilon'_r(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

因此

$$\varepsilon'_r(\omega) - 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon''_r(\omega) = 0$$

进一步地，色散介质一定有损耗，有损耗的介质一定色散。

洛伦兹力

带电荷量 q 、速度为 $\mathbf{v}$ 的质点在电磁场中受到的力为洛伦兹力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

力 F 的单位是牛顿（N），电荷量 q 的单位是库仑（C）。

$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ 是电场力，它是带电体相互作用规律的实验总结。库仑力

$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 是磁场力，也是实验规律的总结。 $I d\mathbf{l} = q\mathbf{v}$ ，磁场对通电导线的作用力。 $\mathbf{F}_m = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ 毕奥-萨伐尔定律

- $\mathbf{F}_m$ 正比于 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{B}$ 的叉积。静止电荷 $\mathbf{v} = 0$ ，所以磁场对静止电荷不起作用。
- 对运动电荷也仅当其速度 $\mathbf{v}$ 有与 $\mathbf{B}$ 垂直的分量时， $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \neq 0$ ，磁场才对运动电荷起作用。
- 磁场对运动电荷的作用力总是与运动电荷的速度 $\mathbf{v}$ 垂直，所以磁场力总是使带电粒子运动轨迹弯转。

洛伦兹力方程描述了电磁场对构成物质的基本单元——电子和原子核的作用，而物质对电磁场的作用则由麦克斯韦方程组和物质的本构关系反映出来。

洛伦兹力方程将电磁学与力学联系起来。

什么是等离子体？

等离子体是电离了的气体，含有大量带正电的离子和带负电的电子，与束缚在原子中的带负电的电子和带正电的原子核不同，等离子体中的电子和离子可以自由运动。

离开地面80~120km高空的电离层就是一个等离子体，电离层是由太阳辐射来的紫外光电离高空大气而形成的。

等离子体分析模型：

如果时谐电场作用于等离子体，等离子体中的电子和离子将受电场力作用而运动。因为电子质量比离子质量小得多，离子的运动可忽略，电子将在平衡位置附近作简谐振动。

电子离开平衡位置振荡，电子和离子的中心不重合，形成电偶极子。所以时谐电场扰动下的等离子体可看成无限多振荡电偶极子的集合。

时谐场作用于等离子体，电子受到的力，按洛伦兹力方程为

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} \quad (1)$$

假设 $\mathbf{x}$ 为电子离开正离子的位移，在电子作简谐振荡假定下，有

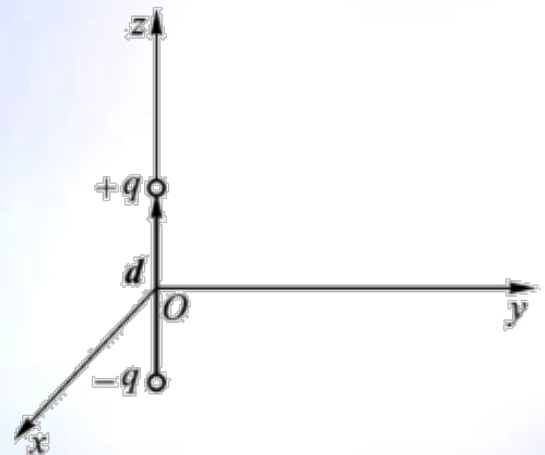
$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -m\omega^2 \mathbf{x} \quad (2)$$

根据偶极子定义，偶极矩密度 $\mathbf{P}$ 为

$$\mathbf{P} = -Ne\mathbf{x} \quad N: \text{电子浓度} \quad (3)$$

由式（1）与式(2)求得 $\mathbf{x}$ ，再将此 $\mathbf{x}$ 代入式（3）得到

$$\mathbf{P} = \frac{-Ne^2}{m\omega^2} \mathbf{E}$$



等离子体的等效介电常数

任何介质中 $\mathbf{D}$ 由自由空间部分与介质极化产生的电偶极矩 $\mathbf{P}$ 两部分构成。

等离子体也是一种介质，所以等离子体中 $\mathbf{D}$ 也由自由空间部分与电偶极矩 $\mathbf{P}$ 两部分构成，即

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \mathbf{E}$$

式中

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

称为等离子体频率。所以等离子体可用一有效介电常数为

$$\varepsilon_e = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

的介质等效。

当 $\omega < \omega_p$, $\varepsilon_e < 0$ 。

电离层中等离子体对电磁波传播的影响

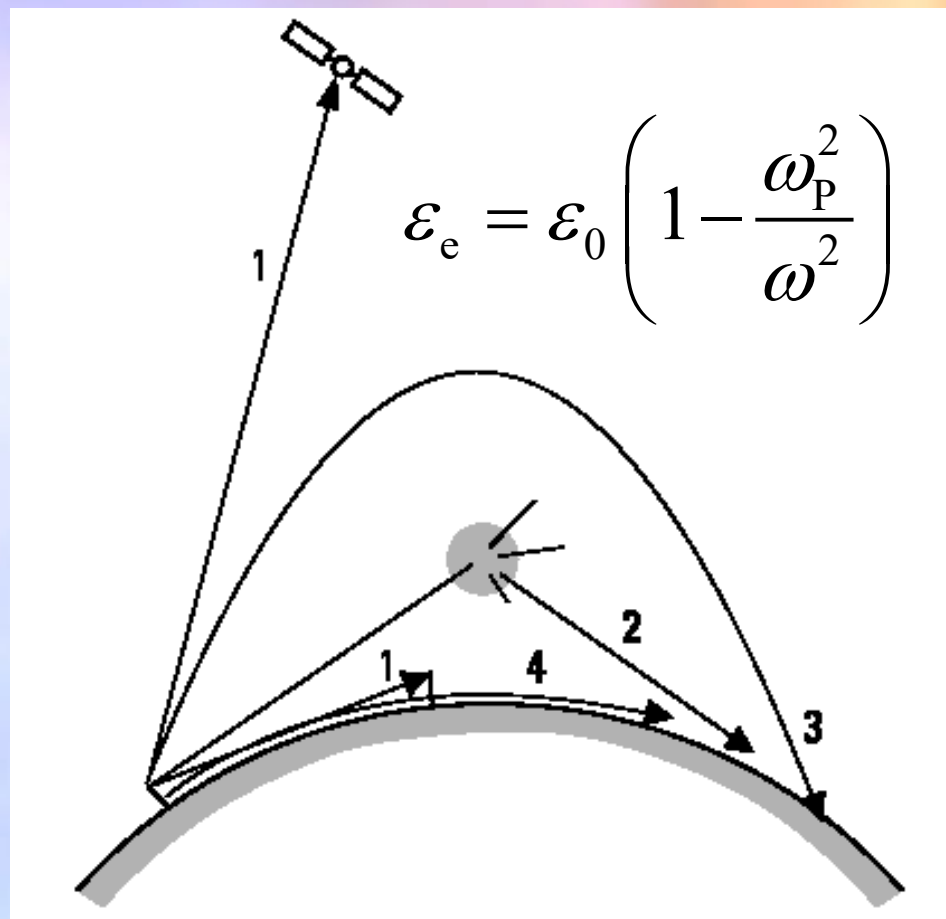
21

电离层中电子浓度随电离层离开地面的高度以及昼夜时间而变化。

白天的典型值为 10^{12} 电子/ m^3 ，相应的 $\omega_p = 5.64 \times 10^7 \text{ rad/s}$ ，或 $f_p = 9 \text{ MHz}$ 。

因此，如果电磁场的频率 $f \gg f_p$ ，电离层与自由空间无多大差别， $\epsilon_e \approx \epsilon_0$ 。

但是对于较低频率的电磁场， ϵ 可以为负，对电磁波全反射，可作为电磁波的反射体。



复习要点

- 积分形式的麦氏方程反映场在某局部空间的平均性质，微分形式的麦氏方程反映场在每一点的性质。

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

- 麦克斯韦方程包含电流连续与电荷守恒方程。 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$
如果将电流连续方程看作基本方程，麦克斯韦方程组中只有两个旋度方程是独立的。
- 麦克斯韦方程加上物质的本构关系才构成一组自洽的方程组。
- 物质可按 ε 、 μ 、 σ 进行分类。当 ε 、 μ 为复数时，其虚部表示介质损耗。
- 麦克斯韦方程组反映电荷、电流产生场，洛伦兹力方程反映场对电荷、电流的作用。等离子体是一种特殊的介质，其介电常数与频率有关，当 $\omega < \omega_p$ 时，介电常数可以为负。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right.$$

复习范围

3.1, 3.2, 3.3, 3.4